# Ueber einige
# Formen der Curve,

die von irgend einem Punkte einer geraden Linie beschrieben wird, deren einer Endpunkt einen Kreis und deren anderer Endpunkt eine durch den Mittelpunkt dieses Kreises gezogene gerade Linie durchläuft.

## Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von


**O. Roebbelen**

Verden.



Rostock.

Carl Boldt's Buchdruckerei.

1874.

## Gleichung der Curve.

Die Gleichung eines Kreises, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt O mit dem Centrum des Kreises zusammenfällt, ist

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Denken wir uns die XAxe horizontal, die Richtung nach rechts als die positive XAxe, die Richtung nach oben als positive YAxe, und legen wir nun eine gerade Linie CD so, daß der Punkt C auf die XAxe, der Punkt D auf die Peripherie des Kreises zu liegen kommt, und wähle ich einen Punkt A auf der Linie so, daß AC = m und AD = n ist. Alsdann ist A jedenfalls ein Punkt der gesuchten Curve und es ist zunächst unsere Aufgabe, die Coordinaten dieses Punktes zu bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes D mit $x_{11}$ und $y_{11}$, die des Punktes A mit x und y, die des Punktes C mit $x_1$ und $y_1$, so habe ich folgende Beziehungen:

$$x_1 = x \pm \sqrt{m^2 - y^2}$$

$$y_1 = 0$$

$$x_{11} = \pm \sqrt{r^2 - y_{11}{}^2}$$

$$x_{11} = \pm \sqrt{r^2 - x_{11}{}^2}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe von x und y, nämlich:

$$x = \frac{\pm m \sqrt{r^2 - y_{11}{}^2} + n(x \pm \sqrt{m^2 - y^2})}{m + n}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{r^2 - x_{11}{}^2}}{m + n}$$

$$(m + n)\, x = \pm m \sqrt{r^2 - y_{11}{}^2} + n\,(x \pm \sqrt{m^2 - y^2})$$

$$(m + n)\, y = \pm m \sqrt{r^2 - x_{11}{}^2}$$

Wir erhalten so zwei Gleichungen mit 4 Unbekannten $x_{11}$, $y_{11}$, x, y; um diese auf 3 zu reduciren, führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir setzen:

$$x_{11} = r \cos\varphi$$
$$y_{11} = r \sin\varphi$$

Führen wir diese Werthe ein, so erhalten wir:

$$(m + n)x = m(\pm r \sqrt{1 - \sin^2\varphi}) + n(x \pm \sqrt{m^2 - y^2})$$
$$(m + n)y = m(\pm r \sqrt{1 - \cos^2\varphi})$$

$$\text{I.} \begin{cases} (m + n)x = \pm m r \cos\varphi + n(x \pm \sqrt{m^2 - y^2}) \\ (m + n)y = \pm m r \sin\varphi \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\pm m x \pm n \sqrt{m^2 - y^2}}{mr} \\ \sin\varphi = \dfrac{\pm (m + n) y}{mr} \end{cases}$$

Durch Eliminirung von $\varphi$ könnten wir eine Gleichung zwischen x und y herstellen; doch ist es zur Charakterisirung der Curve $x_{11}$ ebenso bequem, die Gleichungen I. und II. einstweilen beizubehalten.

## Ueber die verschiedenen Formen der Curve.

Die Curve kann sehr verschiedene Gestalten annehmen, nämlich einmal je nachdem $m > n$ oder $m < n$, alsdann je nachdem $m + n > r$, 2r, 3r 2c. ist. Der kleinste Werth, den $m + n$ annehmen kann, ist $m + n = r$; ist $m + n < r$, so hört die Curve auf, eine geschlossene zu sein.

Es würde eine sehr umfangreiche Rechnung erfordern, wenn man den allgemeinen Fall, wenn nämlich auf einer beliebig langen Linie ein beliebig gelegener Punkt eine Curve beschriebe, behandeln wollte; beschränken wir uns also darauf, einzelne besonders interessante und einfache Fälle zu behandeln.

## Gemeinsame Eigenschaften aller Formen der Curve.

Die Curve ist jederzeit eine doppelte, je nachdem der Fußpunkt der Graden DC rechts oder links vom Anfangspunkte des Coordinatensystems liegt. Da beide Curven in allen ihren Eigenschaften übereinstimmen, so begnügen wir uns damit, die eine zu betrachten und zwar diejenige, deren größter Theil rechts vom Anfangspunkte des Coordinatensystems liegt. Wie alsdann aus den für die Curve gegebenen Bedingungen direct hervorgeht, zerfällt dieselbe in zwei congruente Theile, welche homogen gegen die XAxe liegen.

Die äußersten Punkte der Curve nach links sowohl als nach rechts liegen stets auf der XAxe, wie ebenfalls aus den gegebenen Bedingungen direct erhellt. Die Differenz ihrer Abscissen ist immer $= 2r$; nur für $m + n = r$ wird dieselbe 0.

Setzen wir in Gleichung II. $\angle \varphi = 0$, so wird $\sin\varphi = 0$ und $\cos\varphi = -1$; aldann verwandelt sich die Gleichung II. in: $-mr = mx \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$

$$m^2x^2 + 2m^2rx + m^2n^2 = n^2m^2 - n^2y^2,$$

$n^2y^2$ wird 0, da für $\sin\varphi = 0$ auch y verschwindet. Mithin haben wir:

$$x^2 + 2rx + r^2 = n^2$$

III. A. $$x = -r \pm n$$

Setzen wir $\varphi = 90^0$, so wird $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = 1$. Wir erhalten alsdann für II.:

$$mx = \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$$

$$m^2x^2 = n^2m^2 - n^2y^2$$

$$y^2 = \frac{m^2r^2}{(m+n)^2}$$

$$m^2x^2 = n^2m^2 - \frac{n^2m^2r^2}{(m+n)^2}$$

$$x^2 = n^2 - \frac{n^2r^2}{(m+n)^2}$$

III. B. $$x = \pm\sqrt{n^2 - \frac{n^2r^2}{(m+n)^2}}$$

Setzen wir $\varphi = 180^0$, so wird wieder $\sin\varphi = 0 = y$, dagegen $\cos\varphi = 1$. Mithin lautet II.:

$$mr = mx \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$$

$$x^2 - 2rx + r^2 = n^2$$

$$(x - r)^2 = n^2$$

III. C. $$x = r \pm n$$

Endlich sei $\varphi = 270^0$, dann ist $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = -1$.

$$mx = \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$$

$$y = -\frac{mr}{m + n}$$

$$m^2x^2 = n^2m^2 - n^2y^2$$

$$y^2 = \frac{m^2r^2}{(m + n)^2}$$

$$m^2x^2 = n^2m^2 - \frac{n^2m^2r^2}{(m + n)^2}$$

$$x^2 = n^2 - \frac{n^2r^2}{(m + n)^2}$$

III. D. $$x = \pm\sqrt{n^2 - \frac{n^2r^2}{(m + n)^2}}$$

Im Fall I. und III. stimmen die y vollkommen, die x bis auf das Vorzeichen, in II. und IV. dagegen die x vollkommen, die y bis auf das Vorzeichen überein. In allen Fällen bezieht sich bei den Wurzelgrößen das — auf die links vom Anfangspunkt gelegene Curve und wird deßhalb hier nicht berücksichtigt.

Gehen wir jetzt zu der Betrachtung einzelner Curven über.

$$m + n = r$$

Für $m + n = r$ lautet die Gleichung II.:

$$\pm\, m\,r\cos\varphi = (r - n)x \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$$

$$\pm\, m\,r\sin\varphi = ry$$

$$y = m\sin\varphi$$

Dieses ist für y die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $= m$ ist. Um auch den Werth für x zu finden,

setzen wir den Werth von y in die Gleichung für $\cos\varphi$ und erhalten:

$$\pm\, m\, r \cos\varphi = (r - n)x \pm n \sqrt{m^2(1 - \sin^2\varphi)}$$

$$\pm\, m\, r \cos\varphi = (r - n)x \pm m\, n \cos\varphi$$

$$\cos\varphi\,(\pm\, mr \pm mn) = (r - n)x$$

$$x = \pm\, m \cos\varphi$$

Für $m + n = r$ ist die Curve ein dem erzeugenden Kreise concentrischer Kreis, dessen Radius $= m$ ist. Für diesen einfachsten Fall fallen beide Curvenäste, der nach der positiven und der nach der negativen Seite gelegene, zusammen; doch ist dieser Fall auch der Natur der Sache nach der einzige seiner Art.

---

$$m = r \qquad n = r$$

Alsdann gestaltet sich die Gleichung II. folgendermaßen:

$$r^2\cos^2\varphi = rx \pm r \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$r^2 \sin\varphi = 2ry$$

Suchen wir jetzt eine Relation zwischen x und y zu erhalten: $r^4 \cos^2\varphi = r^2x^2 \pm 2r^2x \sqrt{r^2 - y^2}$

$$r^4 \sin^2\varphi = 4r^2y^2$$

$$r^4 = r^2x^2 \pm 2r^2x \sqrt{r^2 - y^2} + r^4 + 3r^2y^2$$

$$2r^2x \sqrt{r^2 - y^2} = r^2x^2 + 3r^2y^2$$

$$4r^4x^2(r^2 - y^2) = r^4x^4 + 6r^4x^2y^2 + 9r^4y^4$$

$$4x^2(r^2 - y^2) = x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4$$

$$4x^2r^2 - 4x^2y^2 = x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4$$

$$y^4 + \frac{10x^2y^2}{9} + \frac{25x^4}{81} = \frac{-9x^4 + 36x^2r^2 + 25x^4}{81}$$

$$y^2 = -\frac{5x^2}{9} \pm \frac{\sqrt{-9x^4 + 36x^2r^2 + 25x^4}}{9}$$

$$y^2 = -\frac{5x^2}{9} \pm \frac{\sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}{9}$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{5x^2}{9} \pm \frac{\sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}{9}}$$

IV. $$y = \pm \frac{\sqrt{-5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2\, r^2}}}{3}$$

Dieses würde die Gleichung der gesuchten Curve sein. Lösen wir die Gleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$3y = \pm \sqrt{-5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}$$
$$9y^2 = -5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}$$
$$9y^2 + 5x^2 = \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}$$
$$81y^4 + 90x^2y^2 + 25x^4 = 16x^4 + 36x^2r^2$$
$$9x^4 + (90y^2 - 36r^2)x^2 = -81y^4$$
$$x^4 + (10y^2 - 4r^2)x^2 + (5y^2 - 2r^2)^2 =$$
$$= -9y^4 + 25y^4 + 20y^2r^2 + 4r^4 = 16y^4 + 20y^2r^2 + 4r^4$$

V. $$x = \pm \sqrt{-5y^2 + 2r^2 \pm \sqrt{16y_4 + 20y^2r^2 + 4r^4}}$$

## Punkte der Curve.

Ist $y = 0$, so wird der Gleichung IV. durch zwei Werthe von x genügt, nämlich durch $x = \begin{cases} 0 \\ 2r \end{cases}$

Der erste ergiebt sich direct aus der Gleichung. Um den zweiten zu finden, schreiben wir:

$$5x^2 = \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}$$
$$25x^4 = 16x^4 + 36x^2r^2$$
$$9x^2 = 36r^2$$
$$x = \pm 2r$$

Denselben Werth für x würden wir erhalten, wenn wir in III. C. $n = r$ setzten, während der Werth $x = 0$ der Gleichung III. A. entspräche, sobald man in dieser Gleichung für n den Werth r substituirte.

Für $x = 0$ wird jedoch in jedem Falle $y = 0$, wie aus Gleichung IV. und V. erhellt.

Ist $x = \frac{r}{2}$, so ist

$$3y = \pm \sqrt{-\frac{5r^2}{4} \pm \sqrt{r^4 + 9r^4}}$$
$$y = \pm \frac{r\sqrt{-5/4 \pm \sqrt{10}}}{3}$$

Ist $x = r$, so ist

$$y = \pm \frac{r\sqrt{-5 \pm \sqrt{52}}}{3}$$

Ist $x = \frac{3r}{2}$ so ist

$$y = \pm r\sqrt{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{2}}$$

Betrachten wir jetzt den Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise. Da für diesen die Coordinaten der Curve gleich denen des Kreises sind, so haben wir:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{-5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}}{3}$$

$$r^2 - x^2 = \frac{-5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}{9}$$

$$9r^2 - 9x^2 + 5x^2 = \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}$$

$$81r^4 - 72r^2x^2 + 16x^4 = 16x^4 + 36x^2r^2$$

$$81r^2 = 108x^2$$

VI. $$x = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Um den Lauf der Curve vollständig zu bestimmen, müssen wir nur den Werth von x feststellen, für welchen y ein Maximum respective ein Minimum wird. Nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10x \pm \frac{64x^3 + 72xr^2}{2\sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}}{6\sqrt{-5x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}}$$

Setzen wir dieses $= 0$, so können wir den Werth von x bestimmen.

$$10x = \frac{64x^3 + 72xr^2}{2\sqrt{16x^4 + 36x^2r^2}}$$

$$\sqrt{16x^4 + 36x^2r^2} = \frac{64x^3 + 72xr^2}{20x}$$

$$16x^4 + 36x^2r^2 = \frac{4096x^6 + 9216x^4r^2 + 5184x^2r^4}{400x^2}$$

$$= \frac{4096x^4 + 9216x^2r^2 + 5184r^4}{400}$$

$$4x^4 + 9x^2r^2 = \frac{256x^4 + 576\ x^2r^2 + 324r^4}{100}$$

$$400x^4 + 900x^2r^2 = 256x^4 + 576x^2r^2 + 324r^4$$

$$4x^4 + 9x^2r^2 = 9r^4$$

$$x^4 + \frac{9}{4}x^2r^2 + \frac{81}{64}r^4 = \frac{9r^4}{4} + \frac{81r^4}{64} = \frac{225r^4}{64}$$

VII. $$x = \pm\, r\sqrt{-\frac{9}{8} + \frac{15}{8}} = \pm\, r\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Für diesen Werth von x wird y ein Maximum oder Minimum. In unserm Falle entsprechen diesem Werthe von x zwei Werthe von y, einer nach oben und einer nach unten sich erstreckend; natürlich sind beides Maximalwerthe.

---

Gehen wir jetzt dazu über, mit den gegebenen Hülfsmitteln den Lauf der Curve festzustellen. Durchgängig berücksichtigen wir bei den Wurzelgrößen mit positiven und negativen Vorzeichen nur das obere, indem wir die Gleichungen so formen, daß dieses den Werth für die rechts gelegene Curve ausdrückt. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; mithin geht die Curve durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems. y wächst darauf und erreicht für $x = \frac{r}{2}$ den Werth $y = \frac{r\sqrt{-\frac{5}{4} + \sqrt{10}}}{3}$ Von da an nimmt y nur wenig zu, denn schon für $x = \pm\frac{r}{2}\sqrt{3}$ hat es seinen höchsten Werth erreicht, nämlich $y = \frac{r}{2}$, für diesen Werth von x schneidet die Curve auch den Kreis und erreicht für $x = r$ den Werth $y = \pm\frac{\sqrt{-5 \pm \sqrt{52}}}{3}$, also noch einen Werth, der dem Maximum nahe ist. Für $x = \frac{3r}{2}$ wird $y = \pm\, r\sqrt{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{2}}$, ein Werth, der geringer ist, als derjenige für $x = \frac{r}{2}$. Für

$x = 2r$ wird $y$ wieder $= 0$. Diese Werthe wiederholen sich in umgekehrter Reihenfolge bei demjenigen Theile der Curve, der unterhalb der XAxe liegt.

Diese Curve, gleich allen übrigen, welche wir noch betrachten werden, ist ihrer ganzen Länge nach concav gegen die XAxe. Ihr höchster, sowie ihr demselben Werthe von x entsprechender niedrigster Punkt fallen mit den beiden Schnittpunkten des Kreises zusammen. Die Krümmung ist innerhalb des Kreises stärker; außerhalb desselben ist die Curve mehr gestreckt; die Gestalt der Curve ist als eine schleifenförmige zu bezeichnen.

Wir können die noch übrigen Formen der Curve unter zwei Gesichtspunkte bringen, nämlich:

1) $m + n < 2r$
2) $m + n > 2r$

Jede dieser Curvenschaaren zerfällt wieder ihrer Form nach in zwei Abtheilungen, je nachdem $m > n$ oder $m < n$ ist. Um die Gleichungen nicht zu complicirt zu machen, werden wir im Folgenden m sowohl wie n immer auf die Einheit r beziehen.

---

$n = r$; $\qquad m = \frac{r}{2}$;

---

## Gleichung der Curve.

Die Gleichung II. lautet:

$$\cos\varphi = \frac{\pm mx \pm n\sqrt{m^2 - y^2}}{mr}$$

$$\sin\varphi = \pm \frac{(m + n)y}{mr}$$

Setzen wir die Werthe für m und n ein, so erhalten wir:

$$\cos\varphi = \frac{\pm \frac{rx}{2} \pm r\sqrt{\frac{r^2}{4} - y^2}}{\frac{r^2}{2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\pm \frac{3r}{2}\, y}{\frac{r^2}{2}}$$

Lösen wir die allgemeinen Gleichungen in Beziehung auf y auf, so erhalten wir:

$$\cos^2\varphi = \frac{\frac{r^2x^2}{4} \pm r^2x \sqrt{\frac{r^2}{2} - y^2} + \frac{r^4}{4} - r^2y^2}{\frac{r^4}{4}}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\frac{9r^2}{4}\, y^2}{\frac{r^4}{4}}$$

$$\frac{r^4}{4} = \frac{r^2x^2}{4} \pm {}^2x \sqrt{\frac{r^2}{2} - y^2} + \frac{r^4}{4} - r^2y^2 + \frac{9r^2y^2}{4}$$

$$0 = \frac{r^2x^2}{4} \pm r^2x \sqrt{\frac{r^2}{2} - y^2} + \frac{5r^2}{4}\, y^2$$

$$0 = \frac{x^2}{4} \pm dx \sqrt{\frac{r^2}{2} - y^2} + \frac{5y^2}{4}$$

$$\pm 4x \sqrt{\frac{r^2}{4} - y^2} = x^2 + 5y^2$$

$$16x^2 \left(\frac{r^2}{4} - y^2\right) = x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4$$

$$4x^2r^2 - 16x^2y^2 = x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4$$

$$25y^4 + 26x^2y^2 = - x^4 + 4x^2r^2$$

$$y^4 + \frac{26x^2y^2}{25} + \left(\frac{13}{25}\right)^2 x^4 = \frac{- 25x^4 + 100x^2r^2 + 169x^4}{(25)^2}$$

$$y^2 = -\frac{13}{25}\, x^2 \pm \sqrt{\frac{144x^4 + 100x^2r^2}{(25)^2}}$$

$$\text{VII.} \qquad y = \pm \sqrt{\frac{13x^2 \pm \sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}}{25}}$$

Lösen wir die Gleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$\pm 4x\sqrt{\frac{r^2}{4} - y^2} = x^2 + 5y^2$$

$$16x^2\left(\frac{r^2}{4} - y^2\right) = x^4 + 10y^2x^2 + 25y^4$$

$$4x^2r^2 - 16y^2x^2 = x^4 + 10y^2x^2 + 25y^4$$

$$x^4 + (26y^2 - 4r^2)x^2 = -25y^4$$

$$x^4 + (26y^2 - 4r^2)x^2 + (13y^2 - 2r^2) =$$
$$-25y^4 + 169y^4 + 52y^2r^2 + 4r^4$$

$$x^2 = -13y^2 + 2r^2 \pm \sqrt{144y^4 + 52y^2r^2 + 4r^4}$$

VIII. $$x = \pm\sqrt{-13y^2 + 2r^2 \pm \sqrt{144y^4 + 52y^2r^2 + 4r^4}}$$

## Punkte der Curve.

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$.

Für $y = 0$ wird $x = \begin{cases} 0. \\ 2r. \end{cases}$

Für $x = \frac{r}{2}$ wird $y = \pm \frac{r}{5}\sqrt{-\frac{13}{4} \pm \sqrt{34}}$.

Für $x = r$ wird $y = \pm \frac{r}{5}\sqrt{-13 \pm \sqrt{244}}$.

Für $x = \frac{3r}{2}$ wird $y = \pm \frac{r}{5}\sqrt{-\frac{117}{4} \pm \sqrt{954}}$.

Um den Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise zu finden, setzen wir:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}:$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-13x^2 \pm \sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}}{25}}$$

$$25r^2 - 25x^2 = -13x^2 \pm \sqrt{144x^6 + 100x^2r^2}$$

$$25r^2 - 12x^2 = \pm\sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}$$

$$625r^4 - 600r^2x^2 + 144x^4 = 144x^4 + 100x^2r^2$$

$$700r^2x^2 = 625r^4$$

$$28x^2 = 25r^2$$

X. $$x = \pm r\sqrt{\frac{25}{28}}$$

Diesem Werthe von x entspricht der Werth:

$$y = \pm r\sqrt{\frac{3}{28}}$$

Suchen wir jetzt denjenigen Werth von x festzustellen, für den y ein Maximum wird. Wir haben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-26x \pm \frac{546x^3 + 200xr^2}{2\sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}}}{10\sqrt{-13x^2 \pm \sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}}} = 0.$$

Der sich aus dieser Gleichung ergebende Werth von x ist derjenige, für den y ein Maximum oder Minimum wird.

$$26x = \pm \frac{576x^3 + 200xr^2}{2\sqrt{144x^4 + 100x^2r^2}}$$

$$2\sqrt{144x^4 + 100x^2r^2} = \frac{576x^3 + 200xr^2}{26x}$$

$$4(144x^4 + 100x^2r^2) = \frac{331776x^4 + 230400x^2r^2 + 40000r^4}{676}$$

$$576x^4 + 400x^2r^2 = \frac{331776x^4 + 230400x^2r^2 + 40000r^4}{676}$$

$$36x^4 + 24x^2r^2 = 25r^4$$

$$x^4 + \frac{2}{3}x^2r^2 + \frac{1}{9}r^4 = \frac{29}{36}r^4$$

$$x^2 = -\frac{1}{9}r^2 \pm \sqrt{\frac{29}{36}r^4}$$

XI. $$x = \pm r\sqrt{\frac{-2 \pm 3\sqrt{29}}{18}}$$

Diesem Werthe von x entspricht also ein Maximalwerth und ebenso ein Minimalwerth von y, wenn wir den unterhalb der XAxe gelegenen als solchen bezeichnen wollen, während ihrem absoluten Werthe nach natürlich beide Maximalwerthe sind.

## Gestalt der Curve.

Dem Werthe x = 0 entspricht y = 0; mithin geht die Curve durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems. Die Curve steigt dann und erreicht für $x = \frac{r}{2}$ die Höhe:

$$y = \pm \frac{r}{5}\sqrt{-\frac{13}{4} \pm \sqrt{34}}$$

Für $x = \pm r\sqrt{\frac{-2 \pm 3\sqrt{29}}{18}}$ hat die Curve bereits ihren Höhepunkt erreicht, also noch innerhalb des Kreises, da sie erst mit $x = \pm r\sqrt{\frac{25}{28}}$ denselben passirt.

Dem $x = r$ entspricht für y der Werth:

$$y = \pm \frac{r}{5}\sqrt{-13 \pm \sqrt{244}}.$$

Die Curve sinkt dann langsam bis zu $x = \frac{3r}{2}$, für welchen Werth von x das y bis zu $\frac{r}{5}\sqrt{-\frac{117}{4} \pm \sqrt{954}}$ abgenommen hat, und schneidet für $x = 2r$ wieder die XAxe, um denselben Lauf in umgekehrter Reihenfolge der Werthe unterhalb der XAxe zu wiederholen.

Bei dieser Curve ist die schleifenförmige Gestalt ebenfalls nicht zu verkennen, ja dieselbe ist noch ausgeprägter, wie bei der vorigen, da hier das Maximum von y noch innerhalb der Peripherie des Kreises fällt.

---

$n = \frac{r}{2}$; $m = r$;

## Gleichung der Curve.

Die Gleichung II. lautet:

$$\cos\varphi = \pm \frac{mx \pm n\sqrt{m^2 - y^2}}{mr}$$

$$\sin\varphi = \pm \frac{(m + n)y}{mr}$$

Setzen wir die Werthe für m und n ein und lösen die Gleichung nach y auf:

$$r^2 \cos\varphi = \pm \; rx \pm \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$r^2 \sin\varphi = \pm \frac{3r}{2} y$$

$$r^4 \cos^2\varphi = r^2x^2 \pm r^2x \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^4}{4} - \frac{r^2y^2}{4}$$

$$r^4 \sin^2\varphi = \frac{9r^2}{4} y^2$$

$$r^4 = r^2x^2 \pm r^2x \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^4}{4} + \frac{8r^2}{4} y^2$$

$$\mp r^2x \sqrt{r^2 - y^2} = r^2x^2 + \frac{8r^2}{4} y^2 - \frac{3r^4}{4}$$

$$\mp 4x \sqrt{r^2 - y^2} = 4x^2 + 8y^2 - 3r^2$$

$$16x^2r^2 - 16x^2y^2 =$$

$$16x^4 + 64x^2y^2 - 24x^2r^2 + 64y^4 - 48r^2y^2 + 9r^4$$

$$64y^4 + (80x^2 - 48r^2)\, y^2 = - 16x^4 + 40x^2r^2 - 9r^4$$

$$y^4 + \frac{5x^2 - 3r^2}{4} y^2 + \left(\frac{5x^2 - 3r^2}{8}\right)^2 =$$

$$\frac{- 16x^4 + 40x^2r^2 - 9r^4 + 25x^4 - 30x^2r^2 + 9r^4}{64}$$

$$y^2 + \frac{5x^2 - 3r^2}{8} = \pm \frac{\sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}}{8}$$

$$\text{XIII.} \quad y = \pm \sqrt{\frac{- 5x^2 + 3r^2 \pm \sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}}{8}}$$

Lösen wir die Gleichung nach $x$ auf, so erhalten wir:

$$16x^4 + (80y^2 - 40r^2)x^2 = - 64y^4 + 48r^2y^2 - 9r^4$$

$$x^4 + \frac{10y^2 - 5r^2}{2} x^2 + \left(\frac{10y^2 - 5r^2}{4}\right)^2 =$$

$$\frac{- 64y^4 + 38r^2y^2 - 9r^4 + 100y^4 - 100r^2y^2 + 25r^4}{16}$$

$$x^2 + \frac{10y^2 - 5r^2}{4} = \frac{\pm \sqrt{36y^4 - 52r^2y^2 + 16r^4}}{4}$$

$$\text{XIV.} \quad x = \pm \sqrt{\frac{- 10y^2 + 5r^2 \pm \sqrt{36y^4 - 52r^2y^2 + 16r^4}}{4}}$$

## Punkte der Curve.

Für $x = 0$ wird $y = \pm r \frac{\sqrt{3}}{8}$

Für $y = 0$ wird $x = \begin{cases} -\frac{r}{2} \\ +\frac{3r}{2} \end{cases}$

Für $x = \frac{r}{2}$ wird $y = \pm r \frac{\sqrt{7 \pm \sqrt{191}}}{32}$

Für $x = r$ wird $y = \pm r \frac{\sqrt{-2 \pm \sqrt{19}}}{8}$

Suchen wir denjenigen Werth von x, für welchen die Curve den Kreis schneidet, so haben wir:

$$r^2 - x^2 = \frac{-5x^2 + 3r^2 \pm \sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}}{8}$$

$$8r^2 - 3x^2 = 3r^2 \pm \sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}$$

$$5r^2 - 3x^2 = \sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}$$

$$25r^4 - 30x^2r^2 + 9x^4 = 9x^4 + 10x^2r^2$$

$$40x^2 = 25r^2$$

XV. $$x = \pm r \sqrt{\frac{5}{8}}$$

Der entsprechende Werth von y lautet:

$$\frac{25r^2}{64} + y^2 = r^2$$

$$25r^2 + 64y^2 = 64r^2$$

$$64y^2 = 39r^2$$

$$y = \pm r \sqrt{\frac{39}{64}}$$

Endlich berechnen wir noch denjenigen Werth von x, für welchen y ein Maximum wird. Zu dem Ende schreiben wir den Differentialquotienten von y nach x hin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10x \pm \frac{36x^3 + 20xr^2}{2\sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}}}{10\sqrt{-5x^2 + 3r^2 \pm \sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}}} = 0$$

$$10x = \pm \frac{36x^3 + 20xr^2}{2\sqrt{9x^4 + 10x^2r^2}} = \pm \frac{36x^2 + 20r^2}{2\sqrt{9x^2 + 10r^2}}$$

$$\pm 2\sqrt{9x^2 + 10r^2} = \frac{36x^2 + 20r^2}{10x}$$

$$4(9x^2 + 10r^2) = \frac{1296x^4 + 1440x^2r^2 + 400r^4}{100x^2}$$

$$3600x^4 + 4000r^2x^2 = 1296x^4 + 1440x^2r^2 + 400r^4$$

$$x^4 + \frac{10}{9}x^2r^2 + \frac{25}{81}r^4 = \frac{25r^4}{160} + \frac{25r^4}{81} = \frac{625}{1296}r^4$$

$$x^2 = \frac{-20r^2 \pm 25r^2}{36}$$

XVI. $$x = \pm \frac{r}{36}\sqrt{20 \pm 25}$$

## Gestalt der Curve.

Die Curve berührt den Anfangspunkt des Coordinatensystems nicht, sie schneidet vielmehr die XAxe für $x = -\frac{r}{2}$ und für $x = \frac{3r}{2}$. Beginnen wir mit $x = -\frac{r}{2}$ und verfolgen wir den Lauf der Curve.

Die Curve steigt anfangs bedeutend und erreicht für $x = 0$ die Höhe:

$$y = \pm r\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Für $x = \frac{r}{2}$ wird $y = \pm r\frac{\sqrt{7 \pm \sqrt{191}}}{32}$, mithin ist die Gestalt der Curve eine mehr gestreckte geworden. Die Curve erreicht dann ihr Maximum für $x = \pm \frac{r}{18}\sqrt{100 \pm 125}$ und gleich darauf schneidet sie den Kreis für $x = \pm r\sqrt{\frac{5}{8}}$. Dem $x = r$ entspricht ein $y$, welches dem $x = 0$ entsprechenden

y nahezu gleich ist, nämlich $y = \pm r\sqrt{\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{8}}$. Endlich schneidet die Curve die XAxe mit $x = \frac{3r}{2}$.

Wenn wir die Curve also auch wiederum als „von schleifenartiger Gestalt" bezeichnen müssen, so tritt doch der schmälere Theil der Curvenfläche gegenüber dem breitern nicht scharf hervor, weshalb die Gestalt der Curve sich sehr derjenigen einer Ellipse nähert. Der größte Theil der Curve liegt innerhalb der Peripherie des Kreises.

---

$$m = \frac{3r}{2}; \qquad\qquad n = r.$$

---

## Gleichung der Curve.

$$m\, r \cos\varphi = mx \pm n\sqrt{m^2 - y^2}$$

$$m\, r \sin\varphi = (m + n)y$$

$$\frac{3r^2 \cos\varphi}{2} = \frac{3rx}{2} \pm r\sqrt{\frac{9r^2}{4} - y^2}$$

$$\frac{3r^2 \sin\varphi}{2} = \frac{5ry}{2}$$

$$\frac{9r^4 \cos^2\varphi}{4} = \frac{9r^2x^2}{4} \pm 3r^2 x\sqrt{\frac{9r^2}{4} - y^2} + \frac{9r^4}{4} - r^2y^2$$

$$\frac{9r^4 \sin^2\varphi}{4} = \frac{25r^2y^2}{4}$$

$$\frac{9r^4}{4} = \frac{9r^2x^2}{4} \pm 3r^2 x\sqrt{\frac{9r^2}{4} - y^2} + \frac{9r^4}{4} + \frac{21}{4}r^2y^2$$

$$\pm 3r^2 x\sqrt{\frac{9r^2}{4} - y^2} = \frac{9r^2x^2}{4} + \frac{21}{4}r^2y^2$$

$$144x^2\left(\frac{9r^2}{4} - y^2\right) = 81x^4 + 378x^2y^2 + 441y^4$$

$$324x^2r^2 - 144x^2y^2 = 81x^4 + 378x^2y^2 + 441y^4$$

$$441y^4 + 522x^2y^2 = -81x^4 + 324x^2r^2$$

$$49y^4 + 58x^2y^2 = -9x^4 + 36x^2r^2$$

$$y^4 + \frac{58}{49}x^2y^2 + \left(\frac{29}{49}\right)^2 x^4 =$$

$$= \frac{-441x^4 + 1764x^2r^2 + 841x^4}{2401}$$

$$y^2 + \frac{29}{49}x^2 = \frac{\pm\sqrt{400x^4 + 1764x^2r^2}}{49}$$

XVII. $$y = \pm\frac{\sqrt{-29x^2 \pm \sqrt{400x^4 + 1764x^2r^2}}}{7}$$

Lösen wir die Gleichung nach y auf, so erhalten wir:

$$81x^4 + (522y^2 - 324r^2)x^2 = -441y^4$$

$$9x^4 + (58y^2 - 36r^2)x^2 = -49y^4$$

$$x^4 + \left(\frac{58y^2 - 36r^2}{9}\right)x^2 + \left(\frac{29y^2 - 18r^2}{9}\right)^2 =$$

$$\frac{400y^4 - 1044y^2r^2 + 324r^4}{81}$$

$$x^2 + \frac{29y^2 - 18r^2}{9} = \pm\frac{\sqrt{400y^4 - 1044y^2r^2 + 324r^4}}{9}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{18r^2 - 29y^2 \pm \sqrt{400y^4 + 1044y^2r^2 + 324r^4}}}{3}$$

## Punkte der Curve.

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$.

Für $y = 0$ wird $x = \begin{cases} 0 \\ 2r \end{cases}$

Für $x = \frac{r}{2}$ wird $y = \pm\frac{r}{7}\sqrt{-\frac{29}{4} \pm \sqrt{466}}$

Für $x = r$ wird $y = \pm\frac{r}{7}\sqrt{-29 \pm \sqrt{2164}}$

Für $x = \frac{3r}{2}$ wird $y = \pm\frac{r}{7}\sqrt{-\frac{261}{4} \pm \sqrt{6014}}$

### Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise.

$$r^2 - x^2 = \frac{-29x^2 \pm \sqrt{400x^4 + 1764x^2r^2}}{49}$$

$$49r^2 - 20x^2 = \pm \sqrt{400x^4 + 1764x^2r^2}$$

$$2401r^4 - 1960x^2r^2 + 400x^4 = 400x^4 + 1764x^2r^2$$

$$3721x^2 = 2401r^2$$

XIX. $$x = \pm r\sqrt{\frac{2401}{3721}}$$

Diesem Werthe von x entspricht als Werth von y:

$$y^2 + r^2 \cdot \frac{2401}{3721} = r^2$$

$$y = \pm r\sqrt{\frac{1320}{3721}}$$

### Maximal- und Minimal-Werth von y:

$$\frac{dy}{dr} = \pm \frac{-58 \pm \dfrac{1600x^3 + 3528xr^2}{2\sqrt{400x^4 + 1764xr^2}}}{14\sqrt{29x^2 \pm \sqrt{400x^4 + 1764x^2r^2}}} = 0$$

$$29x = \frac{400x^3 + 882xr^2}{\sqrt{400x^4 + 1764xr^2}}$$

$$84100x^4 + 370881x^2r^2 =$$

$$= 40000x^4 + 176400x^2r^2 + 194481r^4$$

$$100x^4 + 441x^2r^2 = 441r^4$$

$$x^4 + \frac{441}{100}x^2r^2 + \left(\frac{441}{200}\right)^2 r^4 = \frac{370881}{40000}r^4$$

$$x^2 + \frac{441}{200}r^2 = \pm \frac{609}{200}r^2$$

XX. $$x = \pm r\sqrt{\frac{-441 \pm 609}{200}}$$

### Gestalt der Curve.

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; die Curve berührt also den Anfangspunkt des Coordinatensystems. Dieses Mal ist

die Krümmung der Curve so, daß sich dieselbe ihrer Gestalt nach noch mehr als die vorige einer Ellipse nähert. Auch fallen die Maximal- und Minimalwerthe von y außerhalb des Kreises und fast in die Mitte der Curve, da der Werth von x, dem die Maxima und Minima von y entsprechen, fast gleich r ist, während die Peripherie des Kreises bereits für $x = \pm r \sqrt{\frac{2401}{3721}}$ geschnitten wird.

---

$m = r;$ $n = \frac{3r}{2};$

## Gleichung der Curve.

$$m r \cos\varphi = mx \pm n \sqrt{m^2 - y^2}$$

$$m r \sin\varphi = (m + n) y$$

$$r^2 \cos\varphi = rx \pm \frac{3r}{2} \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$r^2 \sin\varphi = \frac{5ry}{2}$$

$$r^4 \cos^2\varphi = r^2x^2 \pm 3r^2x \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{9r^4}{4} - \frac{9r^2y^2}{4}$$

$$r^4 \sin^2\varphi = \frac{25r^2y^2}{4}$$

$$3r^2x \sqrt{r^2 - y^2} = r^2x^2 + \frac{5r^4}{4} + \frac{16r^2y^2}{4}$$

$$144x^2r^2 - 144x^2y^2 =$$

$$= 16x^4 + 40x^2r^2 + 128x^2y^2 + 25r^4 + 160r^2y^2 + 256y^4$$

$$y^4 + \left(\frac{17x^2 + 10r^2}{16}\right) y^2 = \frac{-16x^4 + 25r^4 + 104x^2r^2}{256}$$

$$y^4 + \left(\frac{17x^2 + 10r^2}{16}\right) y^2 + \left(\frac{17x^2 + 10r^2}{32}\right)^2 =$$

$$= \frac{225x^4 + 756x^2r^2}{1024}$$

XXI. $$y = \pm \sqrt{\frac{-17x^2 - 10r^2 \pm \sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}}{32}}$$

Lösen wir die Gleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$16x^4 + (-104r^2 + 272y^2)x^2 = 256y^4 - 25r^4 - 160r^2y^2$$

$$x^4 + \left(\frac{34y^2 - 13r^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{34y^2 - 13r^2}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{900y^4 + 144r^4 - 1044r^2y^2}{16}$$

XXII. $$x = \pm \sqrt{\frac{-34y^2 + 13r^2 \pm \sqrt{900y^4 + 144r^4 - 1044r^2y^2}}{4}}$$

## Punkte der Curve.

Für $y + 0$ wird $x = \begin{cases} \frac{r}{2} \\ \frac{5r}{2} \end{cases}$

Für $x = 0$ wird $y$ imaginär.

Für $x = r$ wird $y = \pm r \sqrt{\frac{-27 \pm \sqrt{981}}{32}}$

Für $x = \frac{3r}{2}$ wird $y = \pm r \sqrt{\frac{193 \pm \sqrt{45441}}{128}}$

Für $x = 2r$ wird $y = \pm r \sqrt{\frac{-78 \pm \sqrt{6624}}{32}}$

## Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise.

$$r^2 - x^2 = \frac{-17x^2 - 10r^2 \pm \sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}}{32}$$

$$42r^2 - 15x^2 = \pm \sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}$$

$$1764r^4 - 1260x^2r^2 + 225x^4 = 225x^4 + 756x^2r^2$$

$$2016x^2 = 1764r^2$$

XXIII. $$x = \pm r \frac{\sqrt{1764}}{2016}$$

Der entsprechende Werth von y lautet:

$$y = \pm r \sqrt{\frac{252}{2016}}$$

### Maximal- und Minimal-Werthe von y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-34x \pm \dfrac{900x^3 + 1512xr^2}{2\sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}}}{64\sqrt{-17x^2 - 10r^2 \pm \sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}}} = 0$$

$$34 = \frac{450x^2 + 756r^2}{\sqrt{225x^4 + 756x^2r^2}}$$

$$\sqrt{225x^4 + 756x^2r^2} = \frac{450x^2 + 756r^2}{34}$$

$$225x^4 + 756x^2r^2 =$$

$$= \frac{20250x^4 + 680400x^2r^2 + 571536r^4}{1156}$$

$$25x^4 + 84x^2r^2 = \frac{2250x^4 + 75600x^2r^2 + 63504r^4}{1156}$$

$$2890x^4 + 97104x^2r^2 = 2250x^4 + 75600x^2r^2 + 63504r^4$$

$$x^4 + \frac{346}{100}x^2r^2 + \left(\frac{173}{100}\right)^2 r^4 = \frac{129154}{10000}r^4$$

$$x^2 + \frac{173}{100}r^2 = \frac{\sqrt{129154}}{100}r^2$$

XXIV. $$x = \pm r \sqrt{\frac{-173 \pm \sqrt{129154}}{100}}$$

### Gestalt der Curve.

Diese Curve berührt den Anfangspunkt des Coordinatensystems nicht nur gar nicht, sondern sie ist auch die erste, die ihrer ganzen Ausdehnung nach rechts von demselben liegt. Die Formel zeigt uns dieses an, indem für $x = 0$ $y$ imaginär wird. Der erste Punkt der Curve ist $x = \frac{r}{2}$. Die Curve steigt dann, schneidet alsbald für $x = \pm r \sqrt{\frac{1764}{2046}}$ die Pe-

ripherie des Kreises liegt also zum größten Theile außerhalb desselben. Der Maximalwerth von y erfolgt noch in der ersten Hälfte der Curve, nämlich für $x = \pm r\sqrt{\frac{-2663 \pm \sqrt{825960}}{100}}$.

Die Gestalt der Curve ist nahezu diejenige einer langgezogenen Ellipse.

## Schlußbemerkungen.

Von nun an fallen die Curven fast ganz außerhalb des Kreises, bieten auch in ihrer Form wenig neues. Dieselben sind alle von schleifenförmiger Gestalt und je nach der Länge der erzeugenden Graden und dem Verhältniß der beiden Abschnitte derselben zu einander mehr oder weniger gestreckt. Die Curve nähert sich jedoch bei sehr zunehmendem m wieder der Kreisform, welche sie für $m = \infty$ erreicht. Der entstehende Kreis ist in diesem Falle dem erzeugenden an Größe vollständig gleich und von demselben um die Länge n entfernt.